Решение характеристического сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши на вещественной полуоси

М. А. Шешко (Люблин, Польша), С. М. Шешко (Минск, Беларусь)

Рассматриваем уравнение вида:

$$a(x)\varphi(x) + \frac{1}{\pi i}\int_0^{+\infty} \frac{b(\sigma)\varphi(\sigma)}{\sigma - x} d\sigma = f(x), \quad x \in (0, +\infty), \tag{1}$$

где $a(x), b(x), f(x)$ – заданные на $(0, +\infty)$ комплекснозначные функции, непрерывные по Гельдеру, причем $a^2(x) - b^2(x) \neq 0 \quad \forall x \in (0, +\infty), \quad f(\infty) = 0, \quad \varphi(x)$ – искомая функция также из класса Гельдера, допускающая интегрируемую бесконечность в $x = 0$.

С помощью подстановок $x = \frac{t}{1-t}$, $\sigma = \frac{\tau}{1-\tau}$, $d\sigma = \frac{d\tau}{(1-\tau)^2}$, $\frac{1}{\sigma - x} = \frac{(1-\tau)(1-t)}{\tau - t}$ уравнение (1) приведем к виду

$$a_1(t)\varphi_1(t) + \frac{1}{\pi i}\int_0^1 \frac{b_1(\tau)}{\tau - t}\frac{1-t}{1-\tau}\varphi_1(\tau) d\tau = f_1(t), \quad t \in (0, 1), \tag{2}$$

где $\varphi_1(t) = \varphi\left(\frac{t}{1-t}\right), \quad a_1(t) = a\left(\frac{t}{1-t}\right), \quad b_1(t) = b\left(\frac{t}{1-t}\right), \quad f_1(t) = f\left(\frac{t}{1-t}\right).$

Кроме того, уравнение (2) может быть записано в форме

$$a_1(t)\varphi_1(t) + \frac{1}{\pi i}\int_0^1 \frac{b_1(\tau)}{\tau - t}\varphi_1(\tau) d\tau + \frac{1}{\pi i}\int_0^1 \frac{b_1(\tau)\varphi_1(\tau)}{1-\tau} d\tau = f_1(t), \quad t \in (0, 1). \tag{3}$$

Введя обозначения

$$\Psi(t) = \frac{\varphi_1(t)}{1-t}, \quad F(t) = \frac{f_1(t)}{1-t},$$

уравнение (2) запишем в виде

$$a_1(t)\Psi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_0^1 b_1(\tau)\frac{\Psi(\tau)}{\tau - t} d\tau = F(t), \quad t \in (0, 1). \tag{4}$$

Пусть разыскивается решение этого уравнения в классе функций, непрерывных по Гельдеру на $(0, 1)$, обращающихся в нуль в $t = 1$ и допускающих интегрируемую бесконечность в $t = 0$.

Пусть, далее, индекс $\varkappa$ задачи линейного сопряжения

$$X^+(t) = \frac{a_1(t) - b_1(t)}{a_1(t) + b_1(t)} X^-(t), \quad t \in (0, 1),$$

является неотрицательным. Тогда, согласно [1], общее решение уравнения (4) представимо формулой

$$\Psi(t) = \frac{a_1(t)}{a_1^2(t) - b_1^2(t)} F(t) - \frac{Z(t)}{a_1^2(t) - b_1^2(t)} \frac{1}{\pi i}\int_0^1 \frac{b_1(\tau)}{Z(\tau)}\frac{F(\tau)}{\tau - t} d\tau + \frac{Z(t)}{a_1^2(t) - b_1^2(t)} P_{\varkappa - 1}(t), \tag{5}$$

где $Z(t)=[a_1(t)+b_1(t)]X^+(t)=[a_1(t)-b_1(t)]X^-(t)$, $P_{\varkappa-1}(t)=\gamma_0+\gamma_1 t+\ldots+\gamma_{\varkappa-1}t^{\varkappa-1}$, $\gamma_k, k=0,1,\ldots,\varkappa-1$, – произвольные постоянные.

Из (5) следует, что в первоначальных переменных x,σ решение исходного уравнения (1) при $\varkappa\geq 0$ имеет вид

$$\varphi(x)=\frac{a(x)}{a^2(x)-b^2(x)}f(x)-\frac{Z^*(x)}{a^2(x)-b^2(x)}\frac{1}{\pi i}\int_0^{+\infty}\frac{b(\sigma)}{Z^*(\sigma)}\frac{f(\sigma)}{\sigma-x}d\sigma+\frac{Z^*(x)}{a^2(x)-b^2(x)}P^*_{\varkappa-1}(x),$$

где $Z^*(x)=Z\left(\frac{x}{1+x}\right)$, $P^*_{\varkappa-1}(x)=P_{\varkappa-1}\left(\frac{x}{1+x}\right)$, $x\in(0,+\infty)$.

Обратимся к уравнению (3), предполагая, что $\varkappa<0$. Необходимые и достаточные условия разрешимости этого уравнения имеют вид

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^1\frac{b_1(\tau)}{Z(\tau)}f_1(\tau)\tau^{k-1}d\tau=\frac{1}{\pi i}\int_0^1\frac{b_1(\tau)\varphi_1(\tau)}{1-\tau}d\tau\frac{1}{\pi i}\int_0^1\frac{b_1(\tau)}{Z(\tau)}\tau^{k-1}d\tau, k=1,2,\ldots,|\varkappa|.$$

С учетом равенств

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^1\frac{b_1(\tau)}{Z(\tau)}\tau^{k-1}d\tau=0, k=1,2,\ldots,|\varkappa|-1,\qquad \frac{1}{\pi i}\int_0^1\frac{b_1(\tau)}{Z(\tau)}\tau^{|\varkappa|-1}d\tau=-1,$$

уравнение (3) может быть записано в форме

$$a_1(t)\varphi_1(t)+\frac{1}{\pi i}\int_0^1\frac{b_1(\tau)\varphi_1(\tau)}{\tau-t}d\tau=f_1(t)+\frac{1}{\pi i}\int_0^1\frac{b_1(\tau)}{Z(\tau)}f_1(\tau)\tau^{|\varkappa|-1}d\tau, t\in(0,1). \quad (6)$$

Тогда при выполнении необходимых и достаточных условий

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^1\frac{b_1(\tau)}{Z(\tau)}f_1(\tau)\tau^{k-1}d\tau=0, k=1,2,\ldots,|\varkappa|-1,$$

решение уравнения (6) определяется формулой

$$\varphi_1(t)=\frac{a_1(t)}{a_1^2(t)-b_1^2(t)}f_1(t)-\frac{Z(t)}{a_1^2(t)-b_1^2(t)}\frac{1}{\pi i}\int_0^1\frac{b_1(\tau)}{Z(\tau)}\frac{f_1(\tau)}{\tau-t}d\tau, t\in(0,1).$$

Таким образом, при выполнении условий

$$\frac{1}{\pi i}\int_0^{+\infty}\frac{b(\sigma)}{Z^*(\sigma)}f(\sigma)\left(\frac{\sigma}{1+\sigma}\right)^{k-1}\frac{d\sigma}{(1+\sigma)^2}=0, k=1,2,\ldots,|\varkappa|-1,$$

решение уравнения (1) имеет вид

$$\varphi(x)=\frac{a(x)}{a^2(x)-b^2(x)}f(x)-\frac{Z^*(x)}{a^2(x)-b^2(x)}\frac{1}{\pi i}\int_0^{+\infty}\frac{b(\sigma)}{Z^*(\sigma)}\frac{f(\sigma)}{\sigma-x}d\sigma$$
$$-\frac{Z^*(x)}{a^2(x)-b^2(x)}\frac{1}{\pi i}\int_0^{+\infty}\frac{b(\sigma)}{Z^*(\sigma)}\frac{f(\sigma)}{1+\sigma}d\sigma, x\in(0,+\infty).$$

Литература

1. *Шешко М.А.,* Сингулярные интегральные уравнения с ядрами Коши и Гильберта и их приближенное решение, Люблин, 2003.